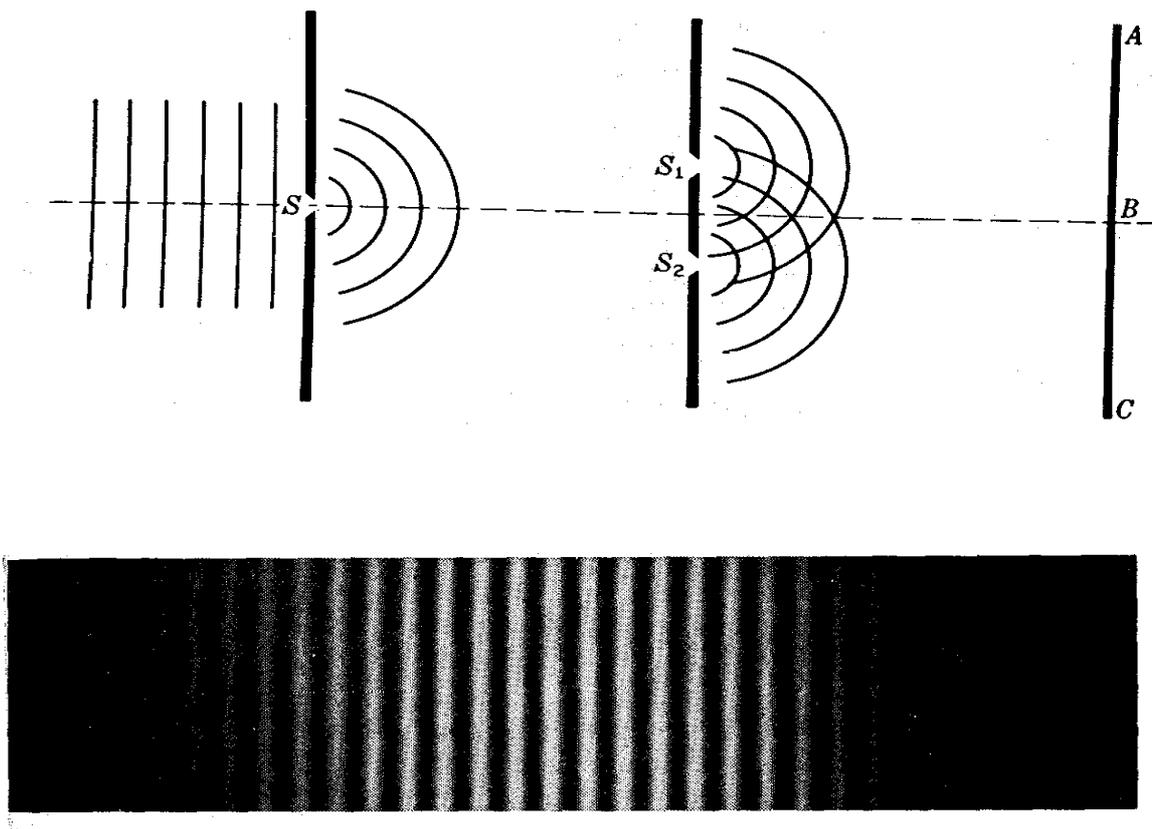


#### 4. Interferência e Difracção

Ao atravessar um orifício de pequenas dimensões, uma onda plana difracta-se dando origem a uma onda esférica. Se incidir em dois orifícios  $S_1$  e  $S_2$ , separados por uma distância  $d$ , as duas ondas emergentes irão sobrepor-se dando origem a um padrão de interferência que pode ser observado no alvo ABC, como indicado na seguinte figura.



**Figura:** interferência de duas ondas. Em baixo padrão obtido no alvo.

A intensidade luminosa resultante da sobreposição dos dois feixes no alvo pode ser calculada somando vectorialmente as amplitudes de cada onda:

$$A_T = A_1 + A_2 = A \sin(kr_1) + A \sin(kr_2) = 2A \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2}\right),$$

Note que não estamos a considerar o decaimento da amplitude com a distância devido ao facto das ondas serem esféricas. Dado que intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude quando  $\frac{2\pi}{\lambda} \delta = m\pi$ , em que  $\delta = r_1 - r_2 = d \sin \theta$  e  $m = 0, 1, 2, \dots$  um número inteiro, a intensidade atinge um máximo.

Por outras palavras existem máximos para ângulos tais que:

$$d \sin \theta = m \lambda.$$

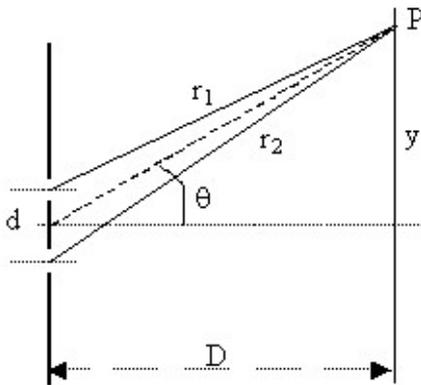
Por outro lado existe interferência destrutiva (ocorre uma zona escura), quando os dois feixes se cancelam-se mutuamente. Isso acontece para:

$$d \sin \theta = (2m+1)/2 \lambda.$$

Se o alvo estiver a uma distância  $D$  suficientemente grande das fendas, podemos aproximar  $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{D}$ , e então a condição para a formação de máximos é:

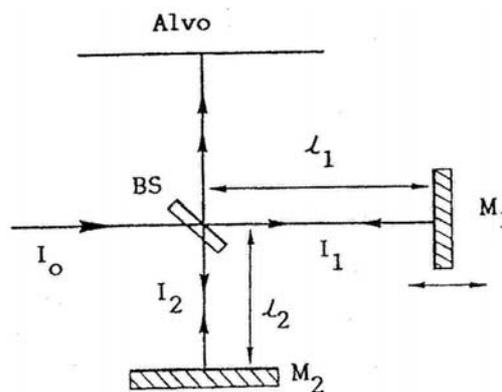
$$y = m \frac{\lambda D}{d}$$

em que  $y$  é a distância medida à perpendicular que passa a meia distância das fendas.



### Interferómetro de Michelson

O interferómetro de Michelson é um dispositivo usado para produzir a interferência de dois feixes coerentes, como mostra a figura seguinte.



**Figura:** Interferómetro de Michelson. BS: vidro semi-reflector, M1: espelho móvel, M2: espelho fixo.

Um feixe de luz  $I_0$  incide num espelho semi-transparente (reflecte sensivelmente metade da radiação e deixa passar a outra metade) que o divide em dois ( $I_1$  e  $I_2$ ). O primeiro é reflectido num espelho móvel percorrendo uma distância  $l_1$  e o segundo num espelho fixo percorrendo uma distância  $l_2$ . Orientam-se os espelhos para que ambos os feixes incidam no mesmo ponto um alvo produzindo interferência.

Da mesma forma que o caso anterior, a soma de  $I_1$  com  $I_2$  dá

$$I_1 + I_2 = \sin(kl_1) + \sin(kl_2) = \cos\left(k\frac{l_1 - l_2}{2}\right)\sin\left(k\frac{l_1 + l_2}{2}\right)$$

Existem máximos sempre que:

$$2\pi\frac{l_1 - l_2}{\lambda} = m\pi$$

ou seja  $m\lambda = l_1 - l_2 = \Delta l$ , em que  $m$  é um número inteiro. Pode-se alterar o padrão de franjas de interferência quer alterando a distância percorrida por cada feixe ( $l_1$  ou  $l_2$ ), quer variando o índice de refração  $n$  por onde passa um dos feixes.

Assim podemos usar esta última expressão para medir o comprimento de onda da luz

$$\lambda = \frac{\Delta l}{m}$$

quer para avaliar pequenas deformações (da ordem de centésimas de  $\mu\text{m}$ ) em superfícies.

Podemos também usar o interferómetro de Michelson para determinar com rigor o índice de refração de um substância. Para tal fazem-se interferir dois feixes coerentes, um dos quais atravessa uma lamina de espessura  $d$  do material cujo índice de refração  $n$  se pretende determinar. Contando o número  $\Delta m$  de franjas que surgem no padrão de interferência, podemos determinar a variação do índice de refração  $\Delta n$  a partir da relação:

$$\Delta n = \Delta m \frac{\lambda}{2d}$$

*Problema:* deduz a última expressão.

### Interferência com fendas múltiplas

Considere-se agora a interferência não de dois, mas de  $N$  feixe alinhados numa linha recta todos separados de uma mesma distância  $d$ . A diferença de fase entre as duas primeiras ondas é dada por:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

A diferença de fase da 3ª onda em relação à primeira é por sua vez  $2\delta$ , e assim por diante. Portanto, usando a notação complexa, a amplitude total nesse ponto será dada por uma série geométrica cuja soma é:

$$A = A_0(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}) = A_0 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

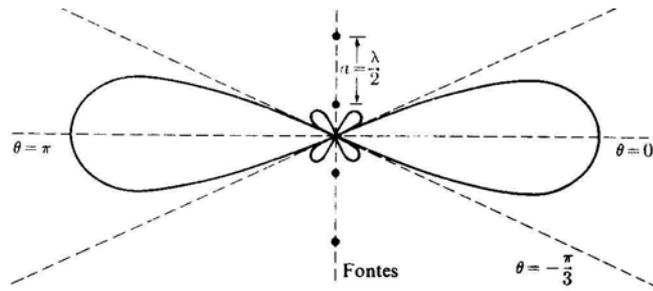
Como a intensidade é igual ao quadrado do módulo da amplitude, temos

$$I(\theta) = A_0^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos(\delta)} = A_0^2 \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2 \gamma}$$

em que  $\gamma = \delta/2$ .

Esta expressão apresenta máximos principais para  $\gamma = n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ou seja

$$d \sin \theta = n\lambda$$



**Figura:** Padrão de emissão originado por um conjunto de 4 antenas isotrópicas equidistantes de  $\lambda/2$

Ou seja, se tivermos 10 emissores obtemos uma intensidade 100 vezes maior pagando o preço dela estar mais direccionada.

Os mínimos ocorrem para

$$N\gamma = n\pi \text{ com } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Este mecanismo é usado para construir antenas direccionais, como por exemplo antenas para estações telemóveis, onde se pretende que a emissão seja feita o mais na horizontal possível. É também usado em sistemas sonoros em que as colunas de som são construídas dispondo vários altifalantes alinhados verticalmente a uma distância regular.

## Difracção

A difracção é um fenómeno que traduz o facto da luz não se propagar de uma forma rectilínea. Pode ser observada no facto da sombra dos objectos não ser abrupta. A difracção é importante apenas quando as dimensões dos objectos são da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda da radiação.

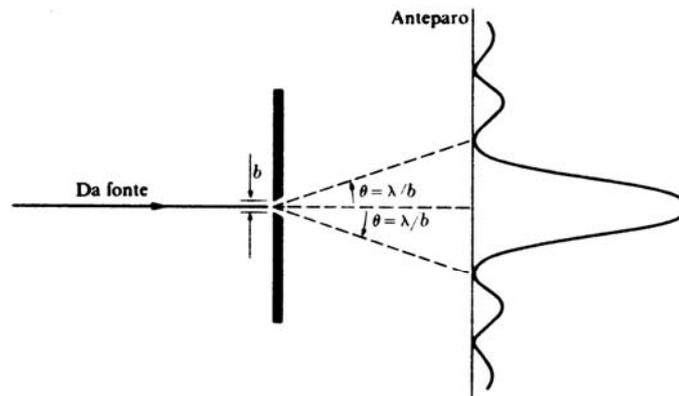
Para analisar a difracção considere-se um feixe de luz a passar por uma fenda rectangular de altura  $b$ . Usando o princípio de Huygens, imagine-se que a frente de onda do feixe é composta de uma miríade de fontes. Ao chegar ao ponto P localizado num alvo, verifica-se que existe uma diferença de fase entre as ondas vindas de cada ponto da fenda, pois a distância percorrida por cada uma delas é ligeiramente diferente. Portanto podemos escrever a amplitude num ponto, P situado num alvo, como

$$A_p = \frac{A_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin \theta} dx = A_0 \frac{\sin \beta}{\beta}$$

em que  $\beta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$ ,  $A_0$  é a amplitude da onda e  $\theta$  é o ângulo do ponto P com a perpendicular ao plano que contem a fenda. Portanto, como a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, temos que

$$I = A_0^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}.$$

A figura abaixo mostra a curva da intensidade em função de  $\beta$  para a difracção numa fenda simples.



**Figura** Difracção de uma fenda

Observe-se que a projecção do feixe luminoso depois de passar na fenda dá origem a um padrão de zonas iluminadas e zonas escuras. Pode experimentar em casa usando uma moeda para difractar a luz e observar que no centro da sombra aparece um ponto luminoso.

*Problema:* verifique que o primeiro mínimo se encontra em  $\sin \theta \approx \theta = \lambda / b$ .

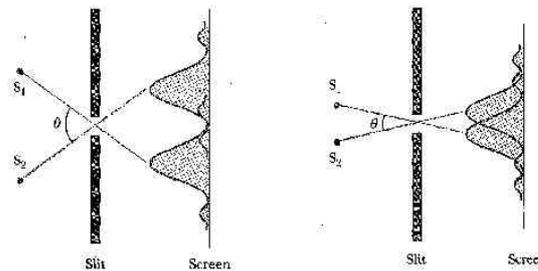
## A resolução óptica

A difracção limita a capacidade de separação de um objecto que esteja a ser observado por um aparelho óptico com uma abertura  $D$ . Se a luz usada tiver um comprimento de onda  $\lambda$ , o ângulo mínimo de separação entre dois pontos do objecto é dado pela fórmula:

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Nota: o ângulo é expresso em radianos.

*Problema:* calcule o tamanho de letra mínimo que o olho humano consegue distinguir a uma distância de 1 m. Considere a comprimento de onda da luz branca com  $0.56 \mu\text{m}$  e a abertura da íris do olho de 0.5 cm. Compare com o limite real sabendo que o olho consegue distinguir 0.1 mm a uma distância de 25 cm.



**Figura:** efeito da difracção na resolução óptica

## Redes de Difracção

Considere uma sequência de fendas com largura  $b$ , separadas por uma distância uniforme  $d$ . Se  $b$  for das dimensões do comprimento de onda, chama-se a este arranjo uma rede de difracção. Ao atravessar esta rede a luz produz padrões de interferência. Combinando a fórmula da difracção de fenda única com a de interferência de múltiplas fontes obtemos, a distribuição de intensidade luminosa:

$$I = A_0^2 \left( \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \left( \frac{\sin^2 (N\gamma)}{\sin^2 \gamma} \right)$$

em que  $\gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$ .

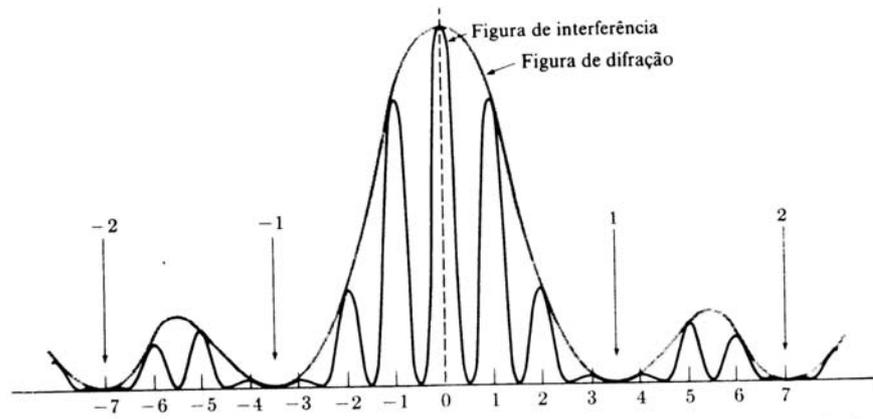
Vemos desta equação que a condição de formação de máximos principais é  $\gamma = n\pi$ , ou seja:

$$d \sin \theta = n\lambda,$$

em que  $n$  é um número inteiro que se designa ordem de difracção.

Usa-se a difracção com raios X para determinar a distância  $d$  entre planos de átomos de um cristal. Neste caso aplica-se a lei de Bragg:

$$2d \sin \theta = n\lambda.$$



**Figura:** rede de difração composta de duas fendas.

Podemos usar a difração para separar um feixe de luz nas suas componentes, uma vez que para cada comprimento de onda existe um ângulo diferente em que ocorre o máximo. Este fenómeno pode ser observado com facilidade se olharmos para a superfície de um CDROM que é composto de inúmeras ranhuras micrométricas.

*Problema:* determine a distância entre ranhuras de um CDROM sabendo que ao incidir na sua superfície a luz de um laser de  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , se obtêm dois pontos luminosos, separados de 40 cm, projectados numa parede a 3 m de distância.

## 4. Fontes de Radiação

Neste capítulo iremos falar de duas formas básicas de produção de radiação: por emissão contínua e discreta. A emissão contínua é produzida por o deslocamento de uma carga acelerada (corrente eléctrica) e é a mais usada nas antenas para emitir radiação até a zona das micro-ondas (1 GHz).

A emissão em espectro discreto resulta da transição de níveis electrónicos de um sistema, por exemplo, quando um electrão numa órbita excitada decai para um nível energético mais baixo. Tem esta designação pois a radiação emitida nestes processos contem um comprimento de onda bem definido. O exemplo mais conhecido deste tipo de emissores é o laser.

Na realidade ambos os processos estão relacionadas a um nível profundo, mas iremos separá-los para maior clareza de exposição.

### I Espectro contínuo

O mecanismo fundamental de produção de radiação é por aceleração de uma carga eléctrica. A potência total radiada por uma carga eléctrica  $q$  com uma aceleração  $a$  é dada por:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

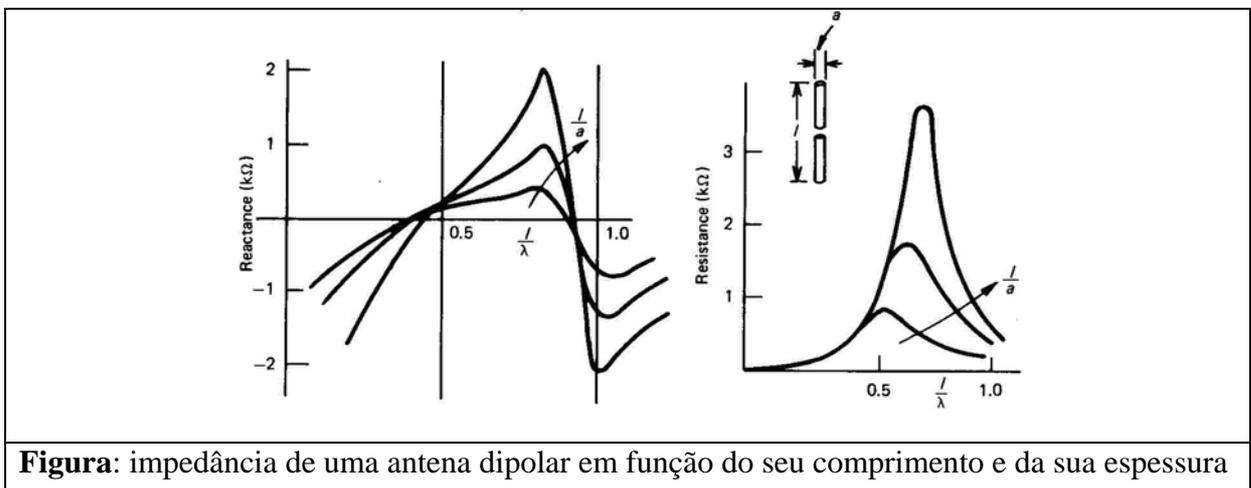
#### 4.1 Antenas dipolares

Para produção de radiação com frequências até 1 GHz usam-se antenas, ou seja superfícies condutoras percorridas por correntes oscilantes. As mais simples e comuns são as antenas dipolares constituídas por um filamento, ou tubo, de comprimento adequado.

O cálculo exacto da potência emitida por uma antena é em geral muito complexo e está fora do âmbito desta disciplina. Iremos apenas apresentar os cálculos para a chamada aproximação dipolar quando as dimensões da antena são muito inferiores ao comprimento de onda da radiação emitida e apresentar o resultado numérico para antenas de meia-onda.

#### Impedância de uma antena

A figura seguinte mostra a resistência de uma antena em função do seu comprimento. Vemos que a antena tem uma impedância em geral complexa sendo aproximadamente resistiva apenas quando  $d = \lambda/2$ .



**Figura:** impedância de uma antena dipolar em função do seu comprimento e da sua espessura

A impedância da antena depende também do seu diâmetro como mostra ainda a figura anterior. Uma antena com maior diâmetro possui uma resistência menor e por isso é capaz de dissipar mais energia radiactiva.

### Dipolo emissor

Podemos considerar uma antena de dimensão  $d$  como um dipolo oscilante se  $d \ll \lambda$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda da radiação emitida. A grandeza de maior importância numa antena é a sua resistência radiativa, como iremos definir mais à frente. Para calcular a resistência da antena consideramo-a como um dispositivo que dissipa uma certa quantidade de energia sobre a forma de radiação.

Se a antena for percorrida por uma corrente oscilante

$$I = I_0 \sin \omega t,$$

Podemos usar a equação anterior para calcular a potência média emitida por unidade de tempo. Para isso consideremos as cargas a executar um movimento harmónico simples e calculamos a sua aceleração quadrática média:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} a_{\max}^2$$

em que  $a_{\max}$  é a aceleração máxima. Usando a relação, válida para o movimento harmónico simples:

$$a_{\max} = \omega^2 d,$$

em que  $d$  é o comprimento da antena, temos que a potência média emitida será

$$P = \frac{q^2 d^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Mas como a corrente eléctrica oscilante se pode escrever

$$I = q\omega$$

e usando a lei de Ohm

$$P = R_a I_{rms}^2$$

podemos finalmente obter a quantidade

$$R_a = \frac{2}{3} \pi Z_0 \frac{d^2}{\lambda^2} = 787(d/\lambda)^2$$

designada por resistência eléctrica da antena. Note que usámos a expressão para a impedância do vácuo:

$$Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon_0} = 377\Omega$$

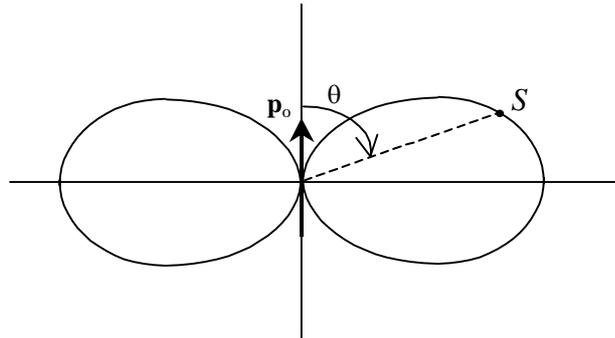
Esta expressão é apenas válida para  $d \ll \lambda$ , pelo que o valor desta resistência é em geral pequeno (inferior a 20  $\Omega$ ). Estas antenas possuem uma baixa resistência e são pouco eficientes e exigem correntes elevadas (com perdas também elevadas) para emitir potências razoáveis.

Note que a energia radiada cresce com o quadrado da frequência do sinal e é esta a principal fonte de perda de energia para os cabos de dois fios condutores paralelos, sobretudo para frequências de sinal elevadas - mais de 100 kHz.

A intensidade de radiação emitida por uma antena dipolar obedece à equação

$$I_r = \frac{Z_0 I^2 d^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \lambda^2 r^2} \text{ W/m}^2$$

como é mostrado na figura seguinte:



**Figura:** Intensidade da radiação em função do ângulo  $\theta$  para a radiação do dipolo eléctrico

### **Array de antenas**

Lembrando o que foi referido no capítulo das interferências múltiplas podemos agora calcular o ganho em direccionalidade de um conjunto formado por  $N$  antenas, comparando a intensidade emitida segundo na direcção preferencial ( $\theta = 0^\circ$ ) com a que seria emitida por uma antena isotrópica localizada num ponto. Dado que  $I(\theta = 0^\circ) = N^2 I_0$ , e se usássemos uma potência equivalente numa única antena teríamos  $I = N I_0$ , portanto o ganho é dado por:

$$G = 10 \log N \text{ dB}$$

Por exemplo, para  $N = 10$  obtém-se um ganho de 20 dB.

### **4.3 Radiação do Corpo Negro.**

Todas as superfícies emitem radiação. Embora pouco significativa para temperaturas baixas, a temperaturas elevadas ela é substancial. As lâmpadas incandescentes são o exemplo mais conhecido onde ocorre esta emissão. O filamento é aquecido pela passagem de corrente eléctrica até uma temperatura da ordem dos 2500 °C. No entanto este é um processo muito pouco eficiente pois apenas cerca de 10% da energia consumida é libertada sob a forma de radiação visível sendo o restante perdido sobre a forma de calor.

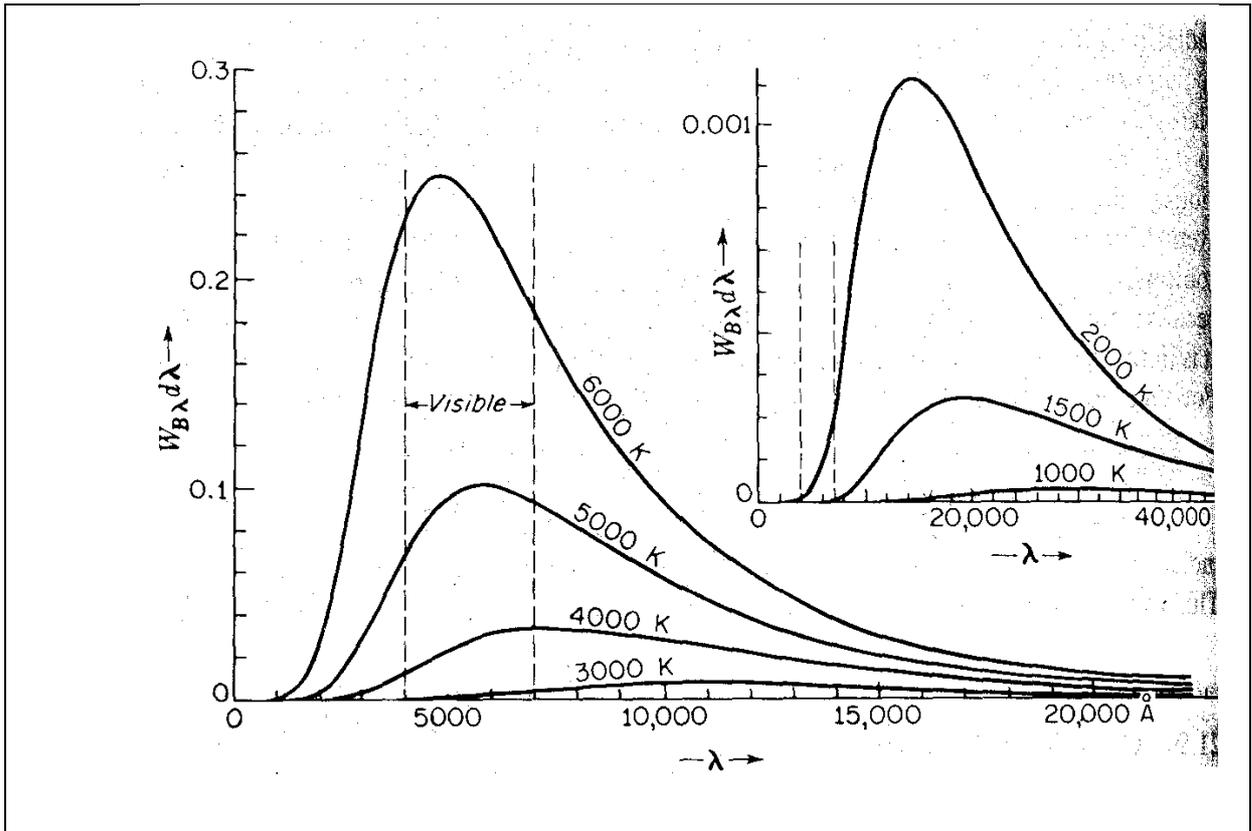
Um corpo com uma área  $A$  à temperatura  $T$  emite radiação com uma potência dada pela lei de Stefan:

$$P = 5.67 \times 10^{-8} A e T^4 \text{ W},$$

em que  $e$  é a emissividade (que assume valores entre 0 e 1). Note que a temperatura vem expressa em graus Kelvins ( $K = ^\circ C + 273$ ). Esta radiação tem origem nas vibrações dos átomos do material aquecido. O espectro emitido é contínuo porque os átomos de um corpo quente efectuam uma vasta gama de transições discretas de níveis de energia. Exemplos: lâmpadas incandescentes, Sol, chama.

*Problema:* estime a potência radiada pelo corpo de um ser humano adulto (área = 1.5 m<sup>2</sup> e emissividade de 0.5).

Lei de Kirchhoff: a uma dada temperatura, o quociente entre a radiação emitida e absorvida é uma constante. Ou seja se um corpo absorve muita radiação, também irá emitir muita radiação quando aquecido.



**Figura 11:** Radiação de um corpo negro a várias temperaturas. A temperatura da superfície do sol é aproximadamente 6000 K. Emite predominantemente na região do visível.

## II Emissão Discreta

### 4.4 Aspectos quânticos da luz

Antes de estudar a produção discreta de radiação, convém abordar a física atômica e os aspectos quânticos da luz.

Einstein demonstrou que existe uma relação entre massa  $m$  e energia  $E$

$$E = m c^2.$$

Massa e energia são duas faces da mesma moeda. Massa possui energia e energia possui massa. Como a radiação possui energia, ela também contém massa. Einstein propôs que a radiação de frequência  $f$  podia ser considerada como um fluxo de partículas discretas, designadas fótons, de energia  $hf$ , em que  $h = 6.64 \times 10^{-34}$  é a constante de Planck.

#### Dualidade onda/partícula

A radiação electromagnética é emitida em quantidades discretas de energia  $E = hf$  que podem ser consideradas partículas com uma massa cinética dada por

$$m = E/c^2 = h\nu/c^2,$$

designados de fótons. A energia de cada fóton depende somente da frequência da radiação emitida embora o seu número seja proporcional à intensidade da fonte. Para energias na zona dos raios-X e raios-gama, ou seja frequências acima de  $10^{17}$  Hz, a radiação interage com a matéria como se fosse um fluxo de fótons e não como uma onda electromagnética.

Por outro lado as partículas com massa  $m$  e velocidade  $v$  podem ser consideradas como uma onda com um comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Este duplo carácter é posto em evidência, por exemplo, pela experiência de interferência de Young feita com electrões. O carácter ondulatório da matéria é mais notório para partículas com massas muito pequenas como o electrão. O microscópio electrónico é uma aplicação bem elucidativa da natureza ondulatória do electrão.

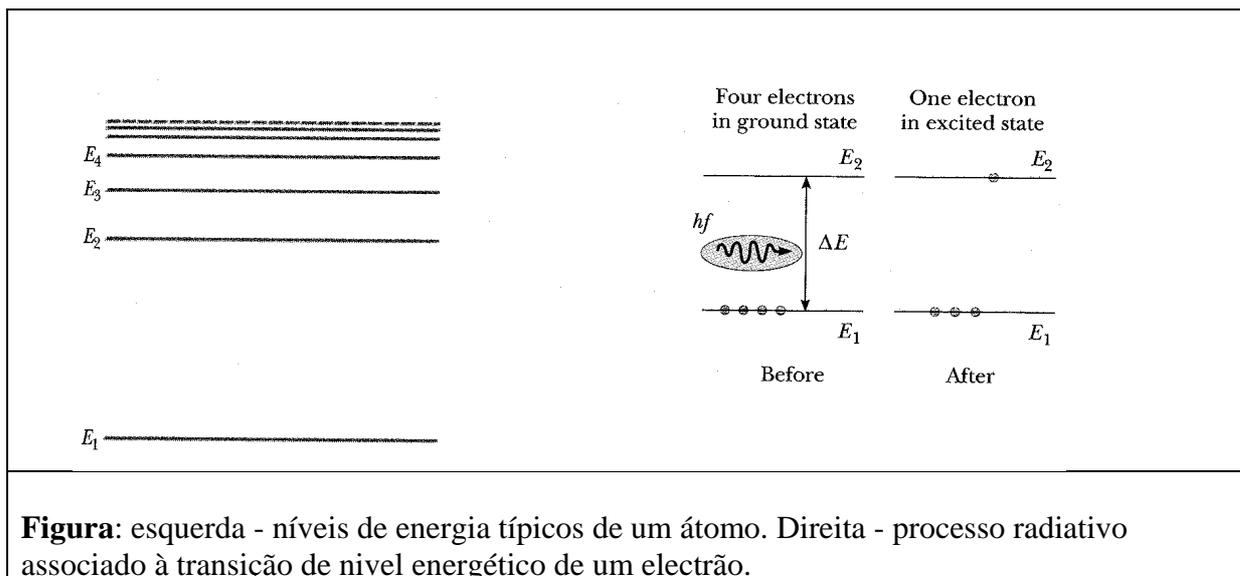
### Física atômica

Nos átomos, os electrões só podem estar localizados em certas zonas, designadas orbitais. Eles preenchem os níveis de energia mais baixos que estão acessíveis. Estes níveis não assumem um valor quaisquer mas estão quantizados. Nos átomos existem as *orbitais atômicas* e nos sólidos formam-se *bandas de energia*.

Os electrões obedecem ao princípio de exclusão de Pauli: cada nível de energia disponível só pode ser ocupado por *uma única* partícula. Os níveis de energia de um átomo são dados de forma aproximada por:

$$E_n = -13.6 \frac{Z_{ef}^2}{n^2} \text{ eV}$$

em que  $Z_{ef}$  é a carga efectiva sentida pelo electrão na orbital  $n$ .



#### 4.5 Produção de radiação discreta

Quando uma partícula (por exemplo um electrão ou uma molécula) efectua uma transição entre dois níveis de energia  $E_1$  e  $E_2$  emite ou absorve um fóton de frequência

$$f = \Delta E / h,$$

em que  $\Delta E = |E_1 - E_2|$ . Este é o principal mecanismo de produção de radiação discreta. Núcleos, átomos ou moléculas num estado excitado podem perder energia transitando para um nível energético mais baixo emitindo simultaneamente um fóton. A transição entre níveis pode ser induzida de várias formas: por exemplo por colisão do electrão com um fóton ou com outro electrão.

O decaimento de electrões excitados para níveis de energia atómica mais baixos pode produzir desde luz visível (transição entre os electrões mais externos) até radiação X (electrões mais internos dos átomos maiores). A passagem da corrente eléctrica por um gás produz também radiação, como é o caso do arco eléctrico (soldadura), das lâmpadas fluorescentes, dos relâmpagos ou as auroras boreais.

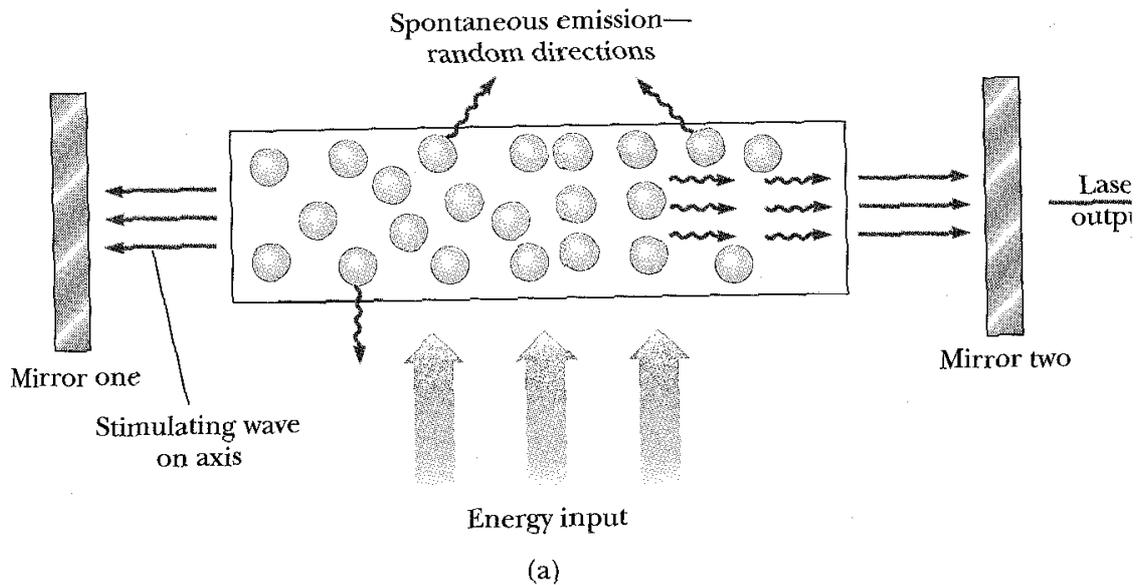
##### 4.5.1 Fluorescência e fosforescência.

Quando um átomo absorve energia de uma fonte luminosa e não tem tempo de se desexcitar, torna-se numa fonte secundária de radiação. Os electrões em estados meta-estáveis decaem para um estado de energia mais baixo, muitas vezes reemitindo radiação com o mesmo comprimento de onda (ressonância), outras vezes com um comprimento de onda maiores – fluorescência. A fosforescência ocorre nos sólidos devido à presença de estados meta-estáveis com um tempo de vida longo - minutos ou horas.

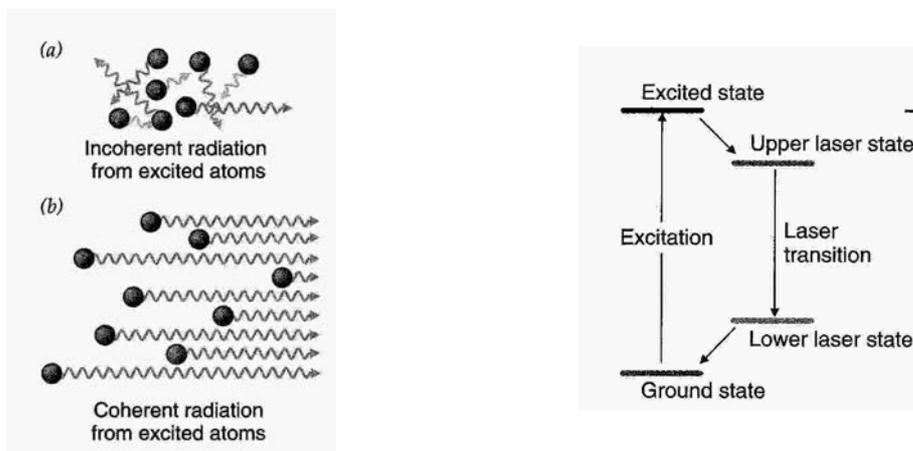
#### 4.6 Emissão estimulada de radiação (*laser*).

O *laser* (Light Amplifier by Stimulation of Emission Radiation) é um dispositivo que funciona pela emissão de luz estimulada. Este fenómeno ocorre quando, na presença de um fóton, um sistema decai emitindo um fóton *exactamente* igual ao primeiro: mesmo comprimento de onda, mesma fase e mesma direcção. Produz-se assim rapidamente uma

avalanche de fótons que são cópias exactas do primeiro fóton. Portanto a radiação do laser é caracterizada por ser quase monocromática.



**Figura:** esquema do funcionamento de um laser. Uma fonte externa fornece energia para proceder ao bombeamento óptico. O meio activo que está entre os dois espelhos funciona como uma cavidade ressonante.



**Figura:** Radiação coerente e esquema dos níveis energéticos de um laser

Para se produzir um feixe laser temos de proceder à chamada inversão da população, ou seja, criar um maior número de moléculas excitadas do que no estado fundamental. Num laser de CO<sub>2</sub> isso pode ser feito iluminando o gás com uma lâmpada normal: é o chamado bombeamento óptico. Para construir um laser é necessário ainda que essas moléculas do meio activo se mantenham no nível de energia excitado durante um tempo suficientemente longo (da ordem dos  $\mu s$ ), caso contrário não são produzidos fótons em número suficiente. A este estado energético dá-se o nome de estado meta-estável.